数字电路与逻辑设计B

第六讲

南京邮电大学

电子与光学工程学院

臧裕斌

2.6 逻辑函数的化简

一、化简的意义和最简的标准

1.化简的意义（目的）

节省元器件；提高工作可靠性

2. 化简的目标

最简与或式或者**最简或与式**

3.最简的标准 $F(A,B,C) = AB\overline{C} + ABC = AB$

(1) 项数最少 --门最少

(2) 每项中的变量数最少 --门的输入端最少

二、公式法

1.与或式的化简

(1) 相邻项合并法

利用合并相邻项公式: $AB + A\overline{B} = A$

例1 $F = AB + CD + A\overline{B} + \overline{C}D$

$$= \left(AB + A\overline{B}\right) + \left(CD + \overline{C}D\right)$$

$$= A + D$$

例2 $F = A\left(BC + \overline{B}\,\overline{C}\right) + A\left(B\overline{C} + \overline{B}C\right)$

$$= A$$

(2) 消项法

利用消项公式 $A+AB=A$ 或多余项公式

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

例3 $F=AB+AB\overline{C}+ABD$

$$=AB+AB(\overline{C}+D)$$

$$=AB$$

例4 $F=AC+\overline{C}D+ADE+ADG$

$$=AC+\overline{C}D$$

(3) 消去互补因子法

利用 消去互补因子公式 $A+\overline{A}B=A+B$

例5 $F=AB+\overline{A}C+\overline{B}C$

$$=AB+\overline{AB}C$$

$$=AB+C$$

例6 $F=A\overline{B}+\overline{A}B+ABCD+\overline{A}\,\overline{B}CD$

$$=A\overline{B}+\overline{A}B+CD(AB+\overline{A}\,\overline{B})$$

$$=A\overline{B}+\overline{A}B+CD$$

(4) 综合法

合并相邻项公式 $AB + A\overline{B} = A$

消项公式 $A + AB = A$

多余项（生成项）公式

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

消去互补因子公式 $A + \overline{A}B = A + B$

结论：先找公共因子，再找互补因子

公式化简法优缺点

优点

不受变量数目的限制。

缺点

没有固定的步骤可循；

需要熟练运用各种公式和规则；

需要一定的技巧和经验；

不易判定化简结果是否最简。

或与式如何化简为最简与或式？

$$F = \left(A+B\right)\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B\right)$$

$$F' = AB + A\overline{B} + \overline{A}B = A + \overline{A}B \quad = A+B$$

$$F = \left(F'\right)' = AB$$

思考题

1.如何理解“最小项对应的取值组合”？

2.最小项具有哪些主要性质？

3.真值表、最小项表达式、最简与或式有何差异？

4.何谓最简与或式？

作业题

2.8

2.10(1)(2)

三、卡诺图化简法

1.逻辑函数的卡诺图表示

(1) 卡诺图的构成

(2) 逻辑函数的几种移植方法

2.卡诺图的运算

3. 卡诺图化简法

(1) 化简原理

(2) 合并的对象

(3) 合并项的写法

(4) 合并的规律

(5) 化简的原则、步骤

(6) 化简举例

四、非完全描述逻辑函数的化简

1. 约束项、任意项、无关项及非完全描述逻辑函数

2. 非完全描述逻辑函数的化简

3. 无关项的运算规则

五、硬件描述语言（HDL）

作业

$$F(A,B)=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B+AB=\overline{A}+B$$

标准与或式中包含(1) 或不包含(0)最小项

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$
A		AB

标准与或式中包含(1)或不包含(0) 最小项

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$
A		AB

$A \backslash B$	0	1
0	1	1
1		1

函数的取值为1或为0

00 1 ⇦ 包含$\overline{A}\,\overline{B}$ ⇨ 00 1

三、卡诺图化简法

1. 卡诺图概述

(1)卡诺图的构成及含义

卡诺图实质上是将逻辑函数的最小项按逻辑相邻的原则排列而成的方格图。

【逻辑相邻】变量直接相乘形成的两个乘积项，只有一个变量互为反变量，其余变量均相同。

例1 已知 $F_1(A,B)$ 和 $F_2(A,B)$ 的卡诺图如下所示

试求 $F(A,B)=F_1\oplus F_2=\sum m(?)$。

(1)按函数的取值为1或为0理解卡诺图 $F(A,B)=m_0+m_1$

A \ B	0	1
0	1	
1	1	

$\boldsymbol{F_1}$

$\oplus$

A \ B	0	1
0		1
1	1	

$\boldsymbol{F_2}$

$=$

A \ B	0	1
0	1	1
1		

$\boldsymbol{F}$

(2)按函数的标准与或式中是否包含最小项理解卡诺图

$$F(A,B)=F_1\oplus F_2=(m_0+m_2)\overline{m}_1\overline{m}_2+\overline{m}_0\overline{m}_2(m_1+m_2)=m_0+m_1$$

例2 将图2所示卡诺图用最小项表达式表示。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	0	0	1

图2

解： $F(A,B,C) = m_1 + m_4 + m_6$

(2) 逻辑函数的卡诺图填写方法

① 已知真值表、标准与或式：直接填

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A \ B	0	1
0	1	
1		1

② 已知一般表达式：转换为标准与或式后填

$$F=\overline{\overline{AB}\cdot\overline{\overline{A}C}}=AB+\overline{A}C$$

$$=AB\left(C+\overline{C}\right)+\overline{A}C\left(B+\overline{B}\right)$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+AB\overline{C}+ABC$$

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	1

③已知一般与或式：观察法

在包含乘积项中全部变量的小格中填 1

例3 将 $F(A,B,C,D)=AB\bar{C}\bar{D}+\bar{A}BD+AC$ 用卡诺图表示。

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11	1		1	1
10			1	1

$$\bar{A}BD=\bar{A}BD\cdot 1$$

$$=\bar{A}BD\cdot\left(C+\bar{C}\right)$$

$$=\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD$$

$$AC=AC\cdot 1$$

$$=AC\cdot\left(\bar{B}\bar{D}+\bar{B}D+B\bar{D}+BD\right)$$

$$=A\bar{B}C\bar{D}+A\bar{B}CD+ABC\bar{D}+ABCD$$

2.卡诺图的运算

(1) 相加

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	0	0

$+$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	0	0

$=$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	0	0

(2) 相乘

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	0	0

×

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	0	0

=

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	0	0	0

(3) 异或

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	0	0

$\oplus$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	0	0

$=$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	0	0

(4) 反演

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	0	0

$$F(A,B,C)=\sum m(1,5)$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	1	1

$$\overline{F}(A,B,C)=\sum m(0,2,3,4,6,7)$$

例4 已知$F_1(A,B,C,D) = A\overline{B} + CD$

$$F_2(A,B,C,D) = B\overline{C} + AD$$

试求 $F(A,B,C,D) = F_1 \oplus F_2 = \sum m(?)$。

解：用卡诺图分别表示函数F_1，F_2，F，如下图所示。

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00			1	
01			1	
11			1	
10	1	1	1	1

F_1

$\oplus$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00				
01	1	1		
11	1	1	1	
10		1	1	

F_2

$=$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	1

F

所以 $F(A,B,C,D)=\sum m(3,4,5,7,8,10,12,13)$。

3. 卡诺图化简法

(1) 化简原理

卡诺图上几何相邻和对称相邻的小方格所代表的最小项逻辑相邻，可以利用合并相邻项公式：$AB + A\overline{B} = A$ 化简。

(2) 合并的对象

卡诺图上几何相邻和对称相邻的、并构成矩形框的、填"1"的、2^n个小方格所代表的最小项。

(3) 合并项的写法

一个卡诺圈对应一个乘积项，该乘积项由卡诺圈内各小方格对应的取值相同的变量组成，其中，"1"对应原变量，"0"对应反变量。

(4)化简的原则

a. 排斥原则：“1”和“0”不可共存于同一圈中；

b. 闭合原则：圈完所有的“1”格；

c. 最小原则：圈个数最少，圈范围最大。

(5)化简的步骤

a. 先圈孤立的“1格”；

b. 再圈只有一个合并方向的“1格”；

c. 圈剩下的“1格”。

注意：

a. 圈中“1”格的数目只能为2^i(i = 0,1,2…)，且是相邻的。

b. 同一个“1” 格可被圈多次(A + A = A)。

c.每个圈中必须有该圈独有的“1”格。

d. 首先考虑圈数最少，其次考虑圈尽可能大。

e. 圈法不是唯一的。

(6) 化简举例

例5 化简函数 $F(A,B,C,D)=\sum m(0,2,5,6,7,9,10,14,15)$ 为最简与或式。

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)=A\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}\bar{D}+\bar{A}BD+BC+C\bar{D}}$$

例6 化简函数 $F(A,B,C,D)=\sum m(0,2,5,6,7,8,9,10,11,14,15)$ 为最简与或式。

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}BD+\overline{B}\,\overline{D}+BC+A\overline{B}$$

多选题 4分

设置

1.关于画卡诺圈化简函数，说法正确的是____。

A 圈内最小项个数必须是2^n个，n=0，1，…

B 相邻方格也包括上下底相邻、左右边相邻和四角相邻

C 同一个方格可以被重用，但新圈中一定要有新方格加入，否则新圈就是多余的

D 每个圈内的方格数尽量多，圈的总个数尽量少

提交